

Allmenningens tragedie

I boka Siffer skriver Jo Røislien at verden går ad undas – det er enkel matematikk. Han beskriver [allmenningens tragedie](#) som du også kan lese om på Wikipedia. Du får en forklaring på hva det er, men ingen matematisk modell. Den skal du få her. Ved å derivere vil du se at det kan bli feil for alle når hver enkelt tenker på seg selv. Eksempelet er hentet fra professor Matthew Jacksons forelesninger i spillteori ved Stanford University.

I en landsby ved en innsjø bor det et antall (n) fiskere. De kan alle velge hvor lang tid de vil bruke til å fiske hver dag:

- a_i er tiden fisker i velger å fiske hver dag
- så hver dag bruker n fiskere til sammen tiden $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_i a_i$

Den sammenlagte tiden som brukes til å fiske hver dag, har følgende konsekvenser:

- Jo mer tid som går med til å fiske, desto større blir fangsten
- Jo større fangsten blir, desto større blir overfiske og utarming av fiskebestanden

I en forenklet modell er fiskebestanden over tid og en fiskers fangst er gitt ved funksjonene:

- Bestanden over tid er gitt ved $\left(1000 - \sum_i a_i\right)$
- Fisker j fanger $a_j \left(1000 - \sum_i a_i\right)$, som er en funksjon av fiskebestanden og tiden han fisker.

Så hva er det beste en fisker kan gjøre? Jo, å finne maksimum av fangsten sin som funksjon av den tiden han kan velge å bruke. Vi deriverer med hensyn på a_i og setter den deriverte lik null:

$$f(a_i) = a_i \left(1000 - \left(a_i + \sum_{j \neq i} a_j\right)\right) = a_i \cdot 1000 - a_i \cdot a_i - a_i \cdot \sum_{j \neq i} a_j = -a_i^2 + \left(1000 - \sum_{j \neq i} a_j\right) \cdot a_i$$

$$f'(a_i) = -2a_i + 1000 - \sum_{j \neq i} a_j$$

$$f'(a_i) = 0 \Leftrightarrow -2a_i + 1000 - \sum_{j \neq i} a_j = 0 \Leftrightarrow a_i = 500 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \neq i} a_j$$

Dette er hver enkelt fiskers beste valg. Så hvis alle gjør det samme, $a^* = a_i$, får vi

$$a^* = 500 - \frac{(n-1)}{2} \cdot a^* \Leftrightarrow a^* + \frac{(n-1)}{2} \cdot a^* = 500 \Leftrightarrow a^* \cdot \left(1 + \frac{(n-1)}{2}\right) = 500$$

$$a^* \cdot \left(\frac{2+n-1}{2}\right) = 500 \Leftrightarrow a^* = 500 \cdot \left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{1000}{n+1}$$

Fangsten til hver enkelt fisker blir dermed

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1000}{n+1}\right) &= \frac{1000}{n+1} \left(1000 - \sum_i \frac{1000}{n+1}\right) = \frac{1000}{n+1} \left(1000 - n \cdot \frac{1000}{n+1}\right) = \frac{1000}{n+1} \left(1000 \cdot \frac{n+1}{n+1} - n \cdot \frac{1000}{n+1}\right) \\ &= \frac{1000^2}{n+1} \left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) = \frac{1000^2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1000}{n+1}\right)^2 \end{aligned}$$

Hva skjer dersom fiskerne kommer sammen og blir enige om en kvote på fangsten? I stedet for å maksimere hver for seg, maksimerer de for fellesskapet og gir hver fisker lik kvote:

$$f\left(\sum_i a_i\right) = \sum_i a_i \cdot \left(1000 - \sum_i a_i\right) = -\left(\sum_i a_i\right)^2 + 1000 \cdot \sum_i a_i$$

$$f'\left(\sum_i a_i\right) = -2 \cdot \left(\sum_i a_i\right) + 1000$$

$$f'\left(\sum_i a_i\right) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(\sum_i a_i\right) + 1000 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot n \cdot a_i = 1000$$

$$a_i = \frac{500}{n}$$

Fangsten til hver enkelt fisker blir i dette tilfellet

$$f\left(\frac{500}{n}\right) = \frac{500}{n} \left(1000 - \sum_i \frac{500}{n}\right) = \frac{500}{n} \left(1000 - n \cdot \frac{500}{n}\right) = \frac{500}{n} (1000 - 500) = \frac{500^2}{n}$$

Så her kommer tragedien. Dersom 1000 fiskere optimaliserer hver for seg:

- Hver fisker bruker omtrent én tidsenhet hver dag $\left(\frac{1000}{1001}\right)$
- Hver fisker fanger mindre enn 1. $\left(\frac{1000}{1001}\right)^2$

Dersom de blir enige om en optimal kvote:

- Hver fisker bruker en halv tidsenhet hver dag $\left(\frac{500}{1000}\right)$
- Hver fisker fanger 250. $\left(\frac{500^2}{1000}\right)$