Eksempler på bruk av IKT i matematikk i videregående skole

FORORD

Formålet med dette heftet er å vise noen anvendelser av digitale hjelpemidler til å løse matematikk oppgaver i videregående skole. Du kan gjerne se på det som et alternativ til bruk av kalkulator.

Ofte lages dataprogram slik at man skal kjenne seg igjen for hurtigere læring, som f. eks skrivebordet i Windows. Når jeg ser en kalkulator på PC skjermen, blir jeg imidlertid skeptisk. Du kan kanskje tenke deg hvorfor jeg foretrekker å skrive og sende SMSer fra PCen, men kan godt lese dem på mobilen. Hvorfor skal matematikkverktøy på PCen begrense seg til få og små taster, ett lite skjermvindu, manglende hjelp funksjon, osv? Derfor synes jeg også program som Excel, GeoGebra og Maxima er bedre verktøy enn kalkulatoren når vi ser bort fra ulempene med bærebar PC (tung, tar plass og lang tid å starte, trenger strømtilførsel, osv.).

Jeg tar ikke for meg den pedagogiske bruken av verktøyene, men går rett på sak og viser hvordan vi kan løse oppgaver fra lærebøkene og tidligere eksamener.

Håpet er selvfølgelig at du lærer noe nytt. Visste du for eksempel hvordan du kan regne med brøker i Excel? Eller hvordan du kan vise tredimensjonale figurer av omdreiningslegemer i Maxima?

Selv om framgangsmåten til eksemplene blir forklart, er dette ikke en bruksanvisning for de programmene som anvendes. De finnes fra før, og er referert nederst på siden.

Foruten Windows og Excel er GeoGebra, Maxima og parAbel kalkulatoren gratis verktøy.

Lykke til.

Askim, 8.mars 2009

Ola Lie

Excel:
- Hjemmside : http://office.microsoft.com/nb-no/excel/FX100487621044.aspx
- Dokumentasjon : http://office.microsoft.com/nb-no/training/CR100479681044.aspx

GeoGebra:
- Hjemmside : http://www.geogebra.org
- Dokumentasjon : http://www.geogebra.org/help/docuno_NO/index.html

Maxima:
- Hjemmside : http://maxima.sourceforge.net
- Dokumentasjon : http://maxima.sourceforge.net/documentation.html

parAbel kalkulator:
- Hjemmside : http://www.parabel.no

Innholdsfortegnelse

Kapittel 1 Brøkregning i Excel (1P og 1T)

Oppgave 1.40 a) og g) side 23 i Sinus 1P

Når vi skriver et blandet tall, bruker vi mellomrom mellom heltallet og brøken, eksempelvis **1 1/2**. Når vi skriver en ekte brøk, må vi skrive en 0 først, så et mellomrom og til slutt brøken: **0 1/2**. Skriver vi **1/2** oppfattes det som 1. februar såfremt vi ikke har formatert cellen som brøk. For å se formlene i regnearket trykker vi på **Ctrl - J**.

1.40 **a)** $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$

	A
1	1/3
2	4/9
3	7/9

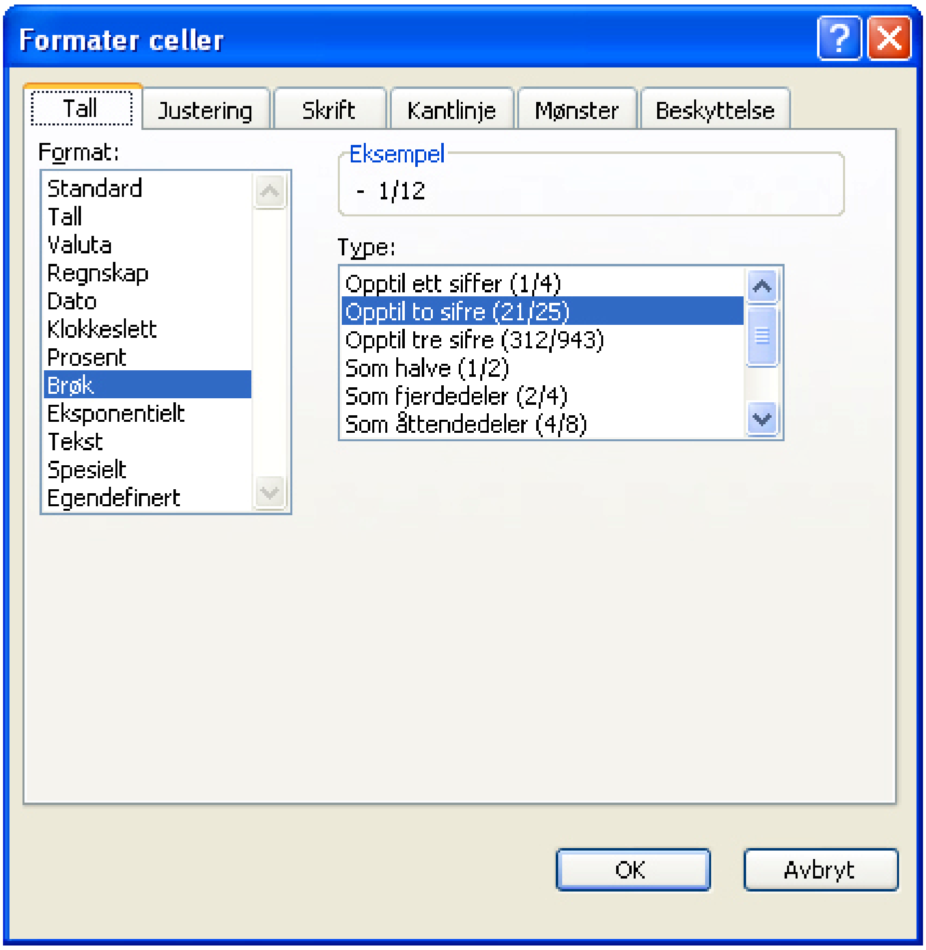
	A
1	0,333333333333333
2	0,444444444444444
3	=A1+A2

1.40 **g)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

	A
1	1/4
2	1/3
3	- 1/12

	A
1	0,25
2	0,333333333333333
3	=A1-A2

For at vi skal se svaret i siste oppgaven må vi formatere cellen som brøk med type opptil to sifre (Høyre klikk på cell A3 og velg **Formater celler…** fra hurtigmenyen:



Kapittel 2 Annuitetslån med Excel (1P)

Oppgave 5.81 side 179 i Sinus 1P

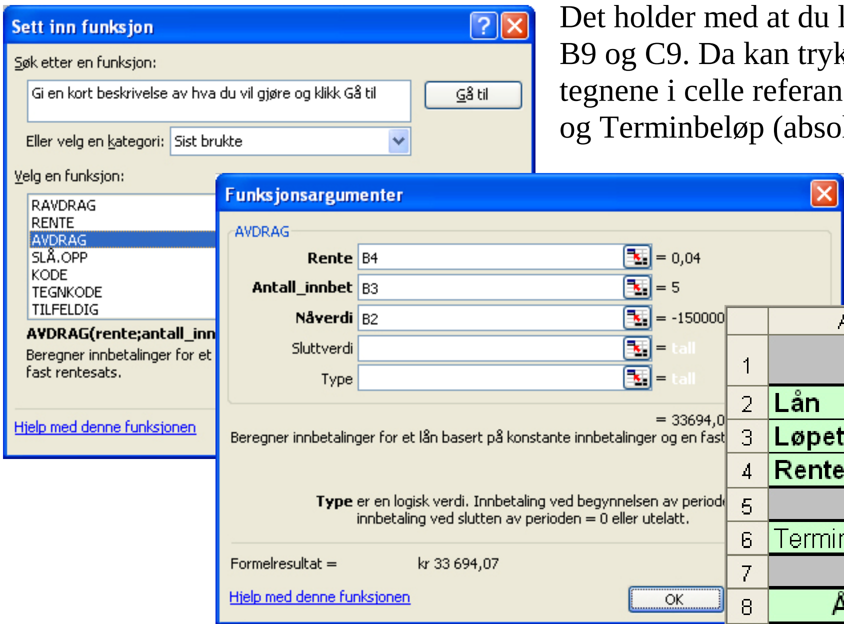
Frida Ford låner 150 000 kr i banken. Hun velger et annuitetslån som hun betaler ned på 5 år med én termin per år. Med 4% rente per år blir terminbeløpet 33 694.

a) *Finn renten og avdraget det første året.*
b) *Finn renten og avdraget det andre året.*
c) *Finn renten og avdraget det siste året.*

Hvorfor ikke lære å beregne terminbeløpet selv? Du kan gjøre det med Excel, som misvisende kaller funksjonen for **avdrag**. Tast inn (som forklart nedenfor) det du ser i figuren til høyre.

	A	B	C	D
1		**Annuitetslån**		
2	**Lån**	-150000	**kroner**	
3	**Løpetid**	5	**år**	
4	**Rente**	0,04		
5				
6	Terminbeløp	=AVDRAG(B4;B3;B2;0;0)		
7				
8	**År**	**Renter**	**Avdrag**	
9	1	**=RAVDRAG($B$4;A9;$B$3;$B$2;0)**	**=$B$6-B9**	a)
10	2	**=RAVDRAG($B$4;A10;$B$3;$B$2;0)**	**=$B$6-B10**	b)
11	3	=RAVDRAG($B$4;A11;$B$3;$B$2;0)	=$B$6-B11	
12	4	=RAVDRAG($B$4;A12;$B$3;$B$2;0)	=$B$6-B12	
13	5	**=RAVDRAG($B$4;A13;$B$3;$B$2;0)**	**=$B$6-B13**	c)
14		Kontroll:	=SUMMER(C9:C13)	
15				

Når du skal legge inn avdrag funksjonen, velger du **Sett inn → funkjson** fra menyen. Du kan klikke på cellene i regnearket når du er i veiviseren.



Det holder med at du legger inn formlene i celle B9 og C9. Da kan trykke på F4 og få fram $ tegnene i celle referansene for Lån, Løpetid, Rente og Terminbeløp (absolutt referanse).

	A	B	C	D
1		**Annuitetslån**		
2	**Lån**	-150 000	**kroner**	
3	**Løpetid**	5	**år**	
4	**Rente**	4 %		
5				
6	Terminbeløp	33 694		
7				
8	**År**	**Renter**	**Avdrag**	
9	1	**6 000**	**27 694**	a)
10	2	**4 892**	**28 802**	b)
11	3	3 740	29 954	
12	4	2 542	31 152	
13	5	**1 296**	**32 398**	c)
14		Kontroll:	150 000	
15				

Og du kan kopiere cellene nedover til henholdsvis B13 og C13 ved å dra i håndtaket nederst til høyre i cellen:

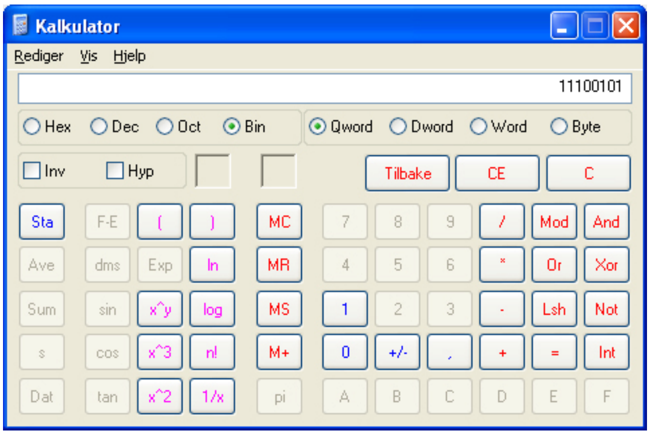
År	Renter	Avdrag
1	6 000	27 694
2	4 892	28 802

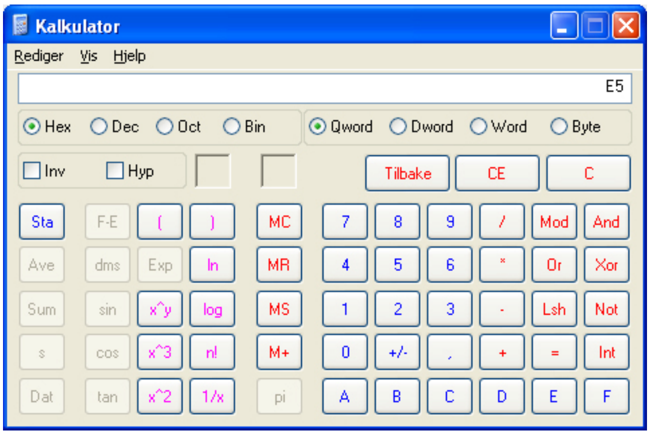
Kapittel 3 Tallsystemer med kalkulatoren i Windows (2P)

Oppgave 1.70 side 27 i Sinus 2P

a) Skriv det binære tallet 11100101 i det heksadesimale tallsystemet.

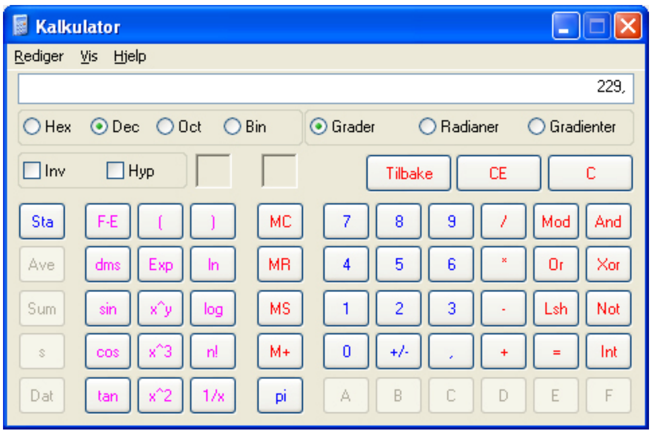
Klikk Start → Kjør, skriv **calc**, og klikk **OK** for å starte kalkulatoren. (Du kan også bruke **Windows-tasten + R**). Velg **Vis → Vitenskapelig** fra menyen. Velg radioknappen **Bin** og klikk eller tast inn **1110010**. Velg radioknappen **Hex** for å vise tallet i det heksadesimale tallsystemet.





b) Hvilket tall er det i vårt tallsystem?

Velg radioknappen **Dec** for å vise tallet i titallssystemet.



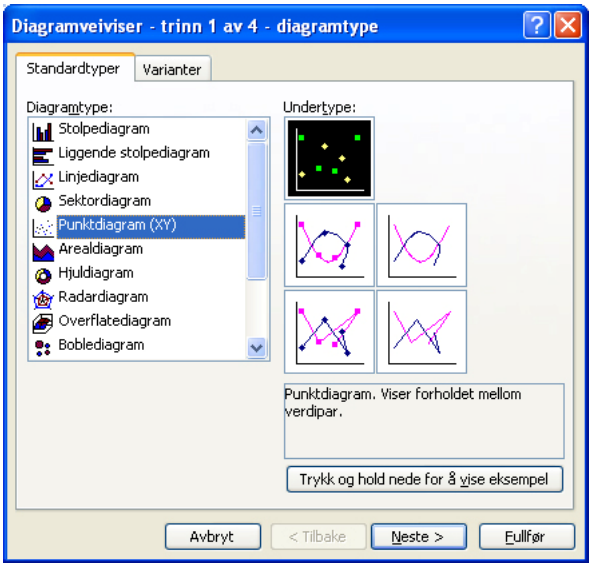
Kapittel 4 Regresjon med Excel (2P)

Oppgave 4.42 side 100 i Sinus 2P

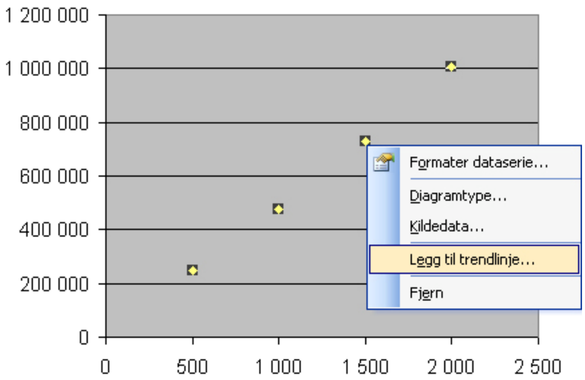
En fabrikk produserer noen elektroniske apparater. Tabellen viser kostnaden K(x) i kroner når det blir produsert x apparater pr måned.

x	500	1000	1500	2000
K(x) Kroner	247 300	474 800	727 300	1 004 800

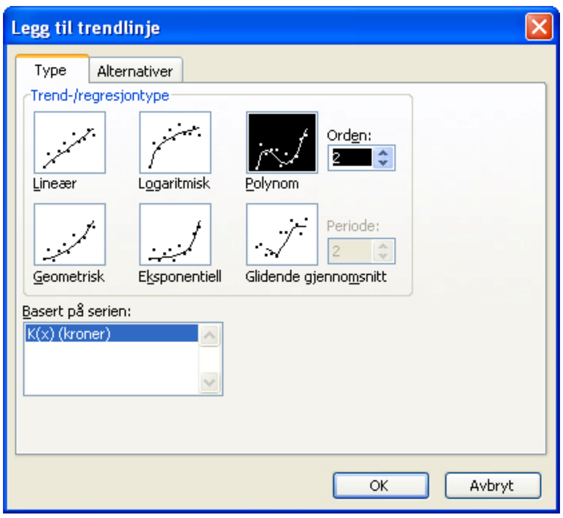
a) Finn det andregradsuttrykket som passer best.
Begynn med å legge tabellen inn i cellene A1:E5. Merk av området og klikk på diagramveiviseren, velg **Punktdiagram** og **Fullfør**

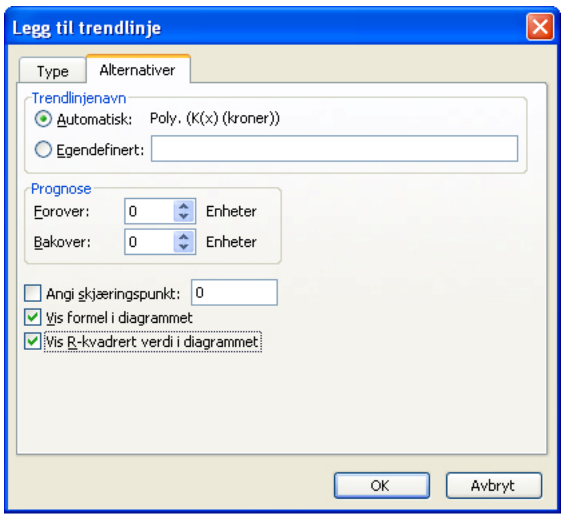


Høyreklikk på en måling og velg **Legg til trendlinje…**



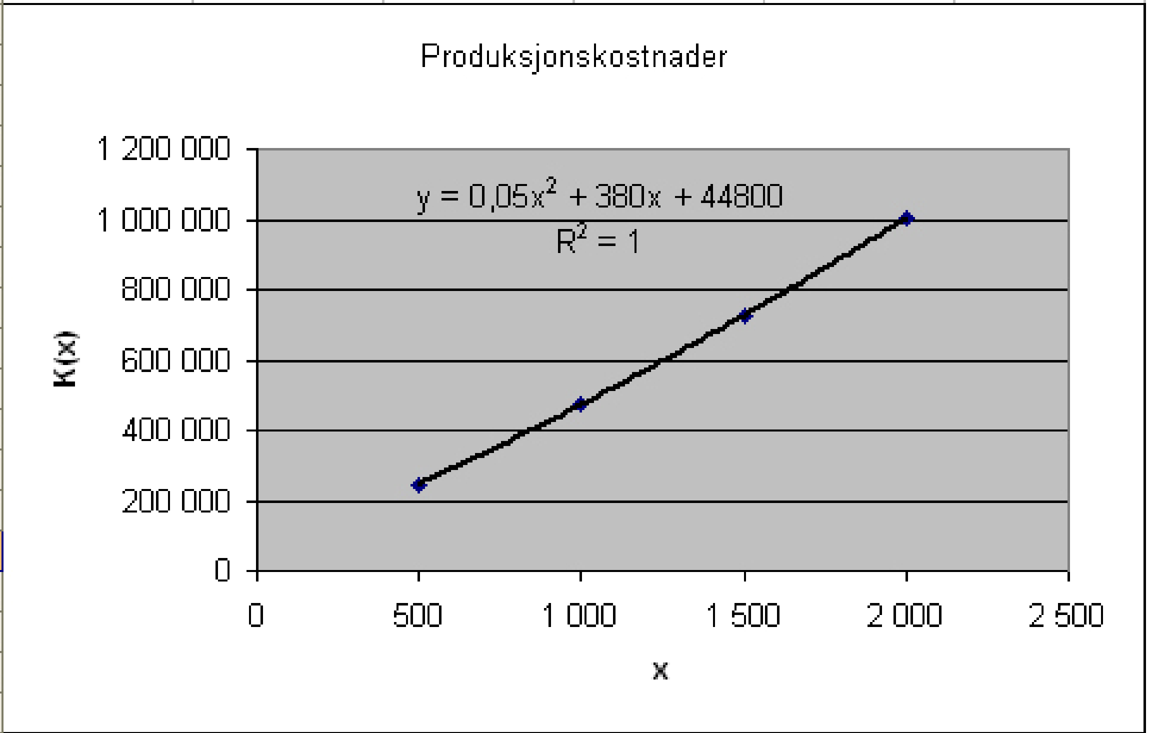
Velg **Polynom Orden 2** under Type, velg **Alternativer** arkfanen og huk av for **Vis formel i diagrammet** og **Vis R-kvadrat i diagrammet**:





Andregradsuttrykket vises i diagrammet:

	A	B	C	D	E	F
1	x	500	1 000	1 500	2 000	
2	K(x) (kroner)	247 300	474 800	727 300	1 004 800	



	A	B
24	x	800
25	K(x) (kroner)	380 800

b) Finn ved regning hvor stor kostnaden er når det blir produsert 800 enheter per måned.

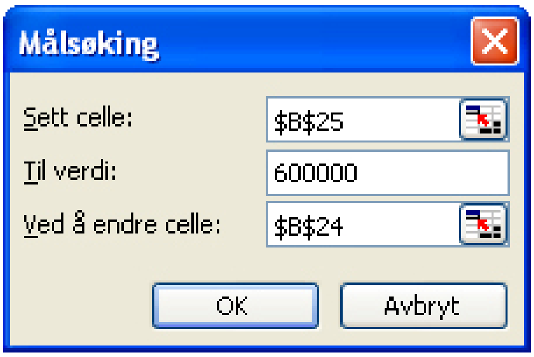
Formelen som vises i grafen legges inn i B25 (se figuren til høyre).

	A	B
24	x	800
25	K(x) (kroner)	=0,05*B24^2+380*B24+44800

Skirv inn 800 i cell B24 og les av svaret i B25 (se figuren ovenfor).

c) Hvor mange enheter blir det produsert når kostnaden er 600 000 kr per måned?

Velg **Verktøy → Målsøking** fra menylinja. Fyll inn feltene som i figuren til høyre og les av svaret i B24.



	A	B
24	x	1 254
25	K(x) (kroner)	600 000

Kapittel 5 Lineær optimering (S1)

med Excel

Oppgave 2.26 side 61 i Sigma S1

Finn den største verdien til 3x + 2y
under disse begrensningene:

$$\begin{bmatrix} 0,5y \le 0,4-2x \\ 6x+3y \le 1,5 \\ x+y \le 0,4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{bmatrix}$$

Det er feil i fasiten.
Se Vedlegg

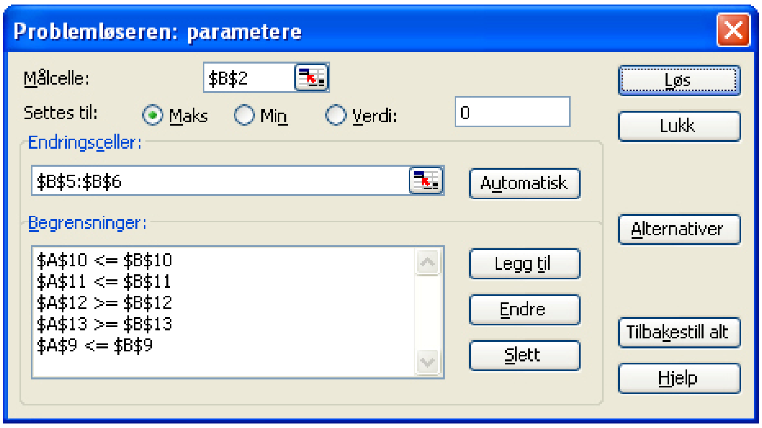
Tast inn følgende:

	A	B
1	**Optimeringsfunksjon**	
2	Z	=3*B5+2*B6
3		
4	**Variable**	
5	X	0
6	Y	0
7		
8	**Begrensninger**	
9	=2*B5+0,5*B6	0,4
10	=6*B5+3*B6	1,5
11	=B5+B6	0,4
12	=B5	0
13	=B6	0

Husk du kan trykke
CTRL + J
for å se formlene

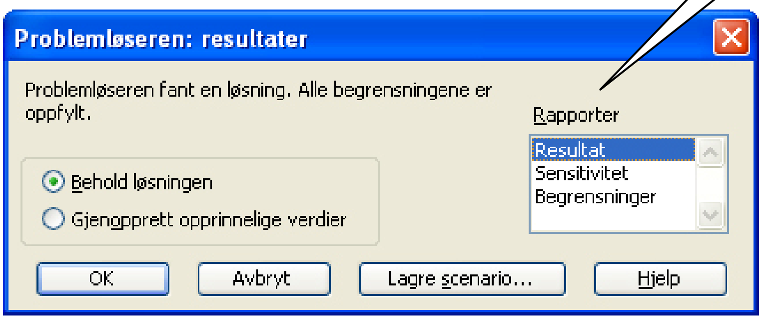
$0,5\,y \le 0,4 - 2x$
er gjort om til
$2x + 0.5y \le 0.4$

Hvis du ikke ser valget **Verktøy → Problemløseren…** på menylinja, må du velge **Verktøy → Tillegg…** og huke av for Problemløseren. Fyll ut som vist nedenfor.



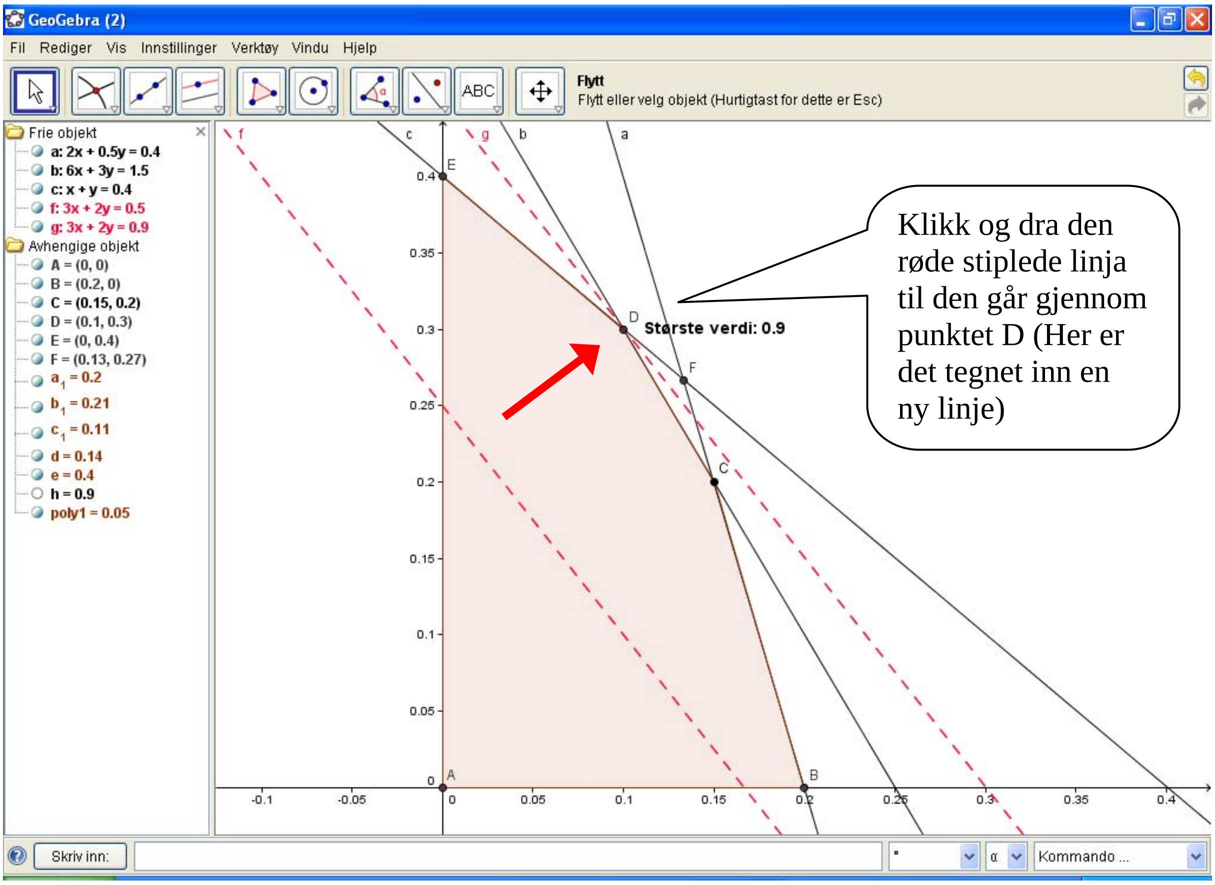
Som du ser, er det også mulig å merke av for rapporter om resultat, sensitivitet og begrensninger.
Rapportene kommer på egne ark

Klikk på **Løs** knappen og få fram:



	A	B
1	**Optimeringsfunksjon**	
2	Z	0,90
3		
4	**Variable**	
5	X	0,10
6	Y	0,30
7		
8	**Begrensninger**	
9	0,35	0,40
10	1,50	1,50
11	0,40	0,40
12	0,10	0,00
13	0,30	0,00

med GeoGebra



1. Skriv inn: **0.5y = 0.4 - 2x** og trykk ENTER
2. Skriv inn: **6x + 3y = 1.5** og trykk ENTER
3. Skriv inn: **x + y = 0.4** og trykk ENTER
4. Zoom inn med hjulet på musa eller det andre valget på verktøykappen til høyre (**Forstørr**).
5. Velg **Nytt punkt** med første valget på andre verktøyknappen fra venstre og klikk på punktene A, B, C, D, E og F
6. Skraver løsningsområdet ved å velge **Mangekant** med første valget på femte verktøyknappen fra venstre og klikk på punktent A, B, C, D, E og A
7. Fjern avmerking for **Vis navn** på linjestykkene a_1, b_1, c_1, d og e (høyre klikk på de avhengige objektene)
8. Skriv inn (en nivålinje): **3x + 2y = 0.5** og trykk ENTER
9. Høyreklikk på nivålinja **f** under frie objekter, velg **Egenskaper** og gjør linja rød og stiplet
10. Velge den første valget på den første verktøyknappen fra venstre (Flytt). Klikk og dra nivålinja **f** og slipp opp når den går gjennom punktet **D**. (Du kan lese av verdien på *3x + 2y* mens du drar linja)
11. Skriv inn: **3*x(D) + 2*y(D)** for å la GeoGebra regne ut største verdi (h = 0.9)
12. Velg **Sett inn tekst** med det tredje valget på den andre knappen fra høyre og klikk i grafen der du vil ha teksten: **"Største verdi: " + h** (Utregningen får navnet g når du bare viser en nivålinje). Endre gjerne formatet til litt større fet skrift)

Kapittel 6 Kostnads- og inntektsfunksjoner (S1)

Eksamen S1 Høsten 08, Del 2 Oppgave 4 Alternativ I

En bedrift produserer og selger en vare. De totale kostnadene K(x) kroner ved produksjon av x enheter av varen per dag er omtrent slik som vist i tabellen nedenfor.

x	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*70*	*90*
()Kx	*3 000*	*3 130*	*3 400*	*3 930*	*4 840*	*6 250*	*11 000*	*19 300*

Inntekten i kroner ved salg av x enheter av varen er $I(x) = 600x - 6x^2$

a) Merk av punktene i tabellen ovenfor i et koordinatsystem. Trekk en kurve gjennom punktene. Tegn grafen til I i samme koordinatsystem. Hvilken produksjonsmengde gir størst inntekt?

b) Ved hvilken produksjon vil kostnader og inntekter være like store?

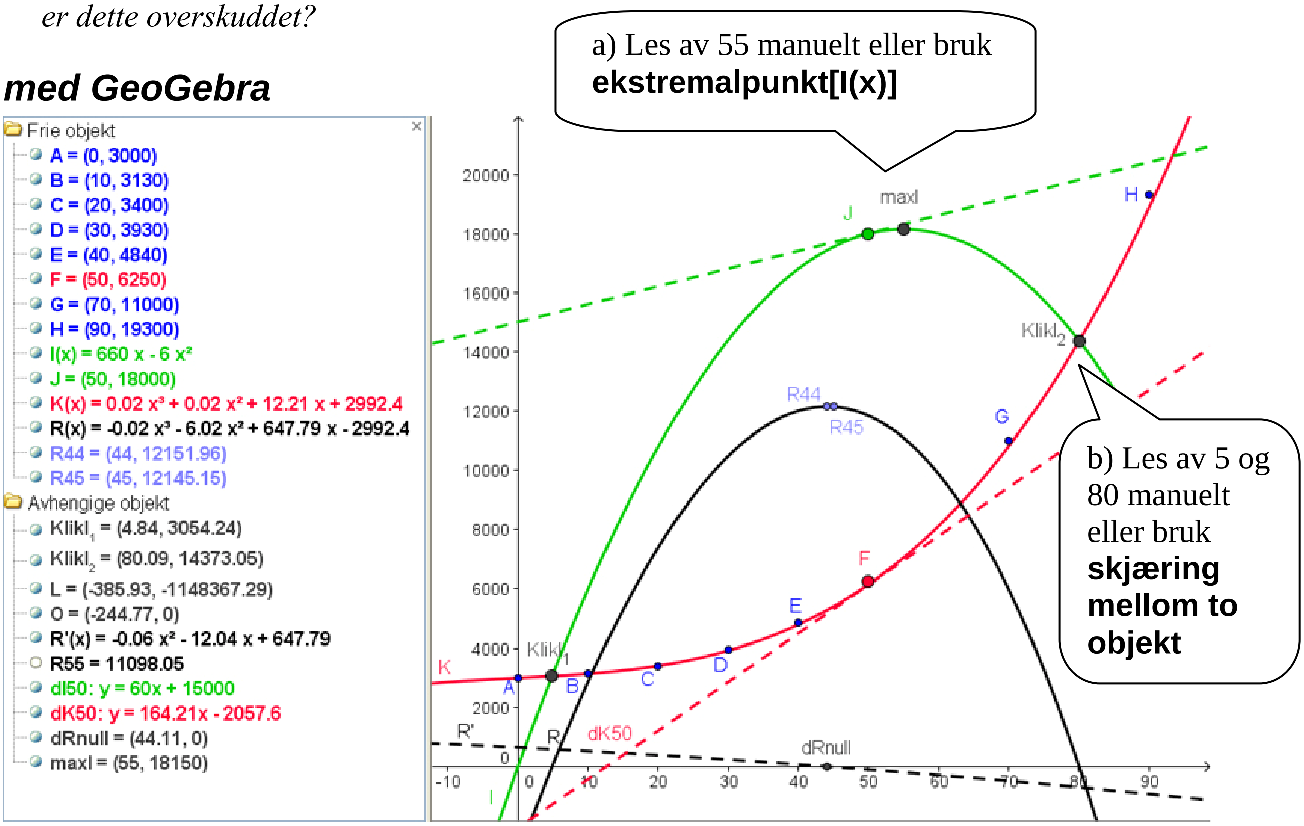
c) Bruk regresjon til å skrive på formen $K(x)=ax^3 + bx^2 + cx + d$

d) Undersøk om det lønner seg å øke produksjonen når $x = 50$.

Bedriften vil tilpasse produksjonen slik at overskuddet blir størst mulig. I(x)K(x)−

e) Bruk derivasjon til å finne den produksjonen som gir størst overskudd per dag. Hvor stort er dette overskuddet?

med GeoGebra



c) Regresjonen er gjort i Excel som forklart i Kapittel 4

d) Satt inn nytt punkt (F og J) og tangenter. Ser at kostnadene stiger mer enn inntektene når x=50. Altså lønner det seg ikke å øke produksjonen.

e) Definert R(x) som I(x)-K(x), **derivert[R(x)]**, **nullpunkt[R'(x)]**, leser av 44.11, setter inn nytt punkt R44 i x=44 på R(x) og leser av <u>12 152</u>

med wxMaxima

En bedrift produserer og selger en vare. De totale kostnadene K(x) kroner ved produksjon av x enheter av varen per dag er omtrent slik som vist i tabellen nedenfor.

x	0	10	20	30	40	50	70	90
K(x)	3 000	3 130	3 400	3 930	4 840	6 250	11 000	19 300

Inntekten i kroner ved salg av x enheter av varen er I(x) = 600x – 6x2

a) Merk av punktene i tabellen ovenfor i et koordinatsystem.
Trekk en kurve gjennom punktene. Tegn grafen til I i samme koordinatsystem.
Hvilken produksjonsmengde gir størst inntekt?

```
(%i1) Punkter:[[0,3000], [10,3130], [20,3400], [30,3930], [40,4840],
               [50,6250], [70,11000],[90,19300]];
(%o1) [[0,3000],[10,3130],[20,3400],[30,3930],[40,4840],[50,6250],[70,11000],[
90,19300]]
```

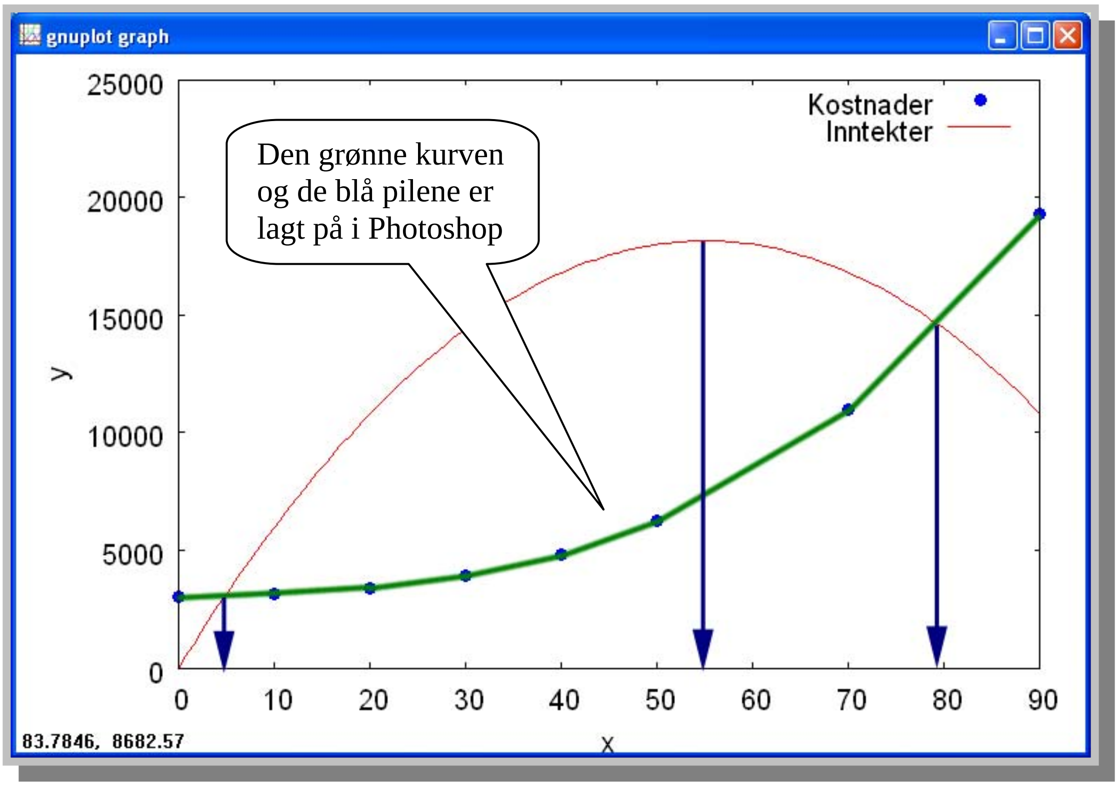
```
(%i2) I:660*x-6*x^2;
```
(%o2) $660\,x-6\,x^2$

```
(%i3) plot2d([[discrete,Punkter], I],[x,0,90], [y,0,25000],
             [style, points, lines],
             [legend, "Kostnader", "Inntekter"]);
(%o3)
```

Les av ca 55 enheter gir størst inntekt. Eller regn ut:

```
(%i4) dI:diff(I,x,1);
(%o4) 660 - 12 x
```

```
(%i5) float(realroots(dI));
(%o5) [x=55.0]
```



b) Ved hvilken produksjon vil kostnader og inntekter være like store?

Leser av grafen: ca 5 og ca 80 enheter gir like store kostnader og inntekter

c) Bruk regresjon til å skrive på formen K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d

```
(%i6) load(lsquares);
(%o6) f:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.17.1/share/contrib/lsquares.mac
(%i7) M:matrix([0,3000], [10,3130], [20,3400], [30,3930], [40,4840],
          [50,6250], [70,11000],[90,19300]);
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 0 & 3000 \\ 10 & 3130 \\ 20 & 3400 \\ 30 & 3930 \\ 40 & 4840 \\ 50 & 6250 \\ 70 & 11000 \\ 90 & 19300 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) float(lsquares_estimates(M,[x,y], y = A*x^3 + B*x^2 + C*x + D, [A,B,C,D]));
(%o8) [[A=0.020642423960264 , B=0.019071868001847 , C=12.2077058803059 , D=2992.444717826015]]
(%i9) K:0.020642423960264*x^3 + 0.019071868001847*x^2 + 12.2077058803059*x + 2992.444717826015;
```

$$(\%o9)\quad 0.020642423960264\,x^3+0.019071868001847\,x^2+12.2077058803059\,x+2992.444717826015$$

d) Undersøk om det lønner seg å øke produksjonen når x = 50.

```
(%i10) R:I-K;
```

$$(\%o10)\quad -0.020642423960264\,x^3-6.019071868001847\,x^2+647.7922941196941\,x-2992.444717826015$$

```
(%i11) dR:diff(R,x,1);
```

$$(\%o11)\quad -0.061927271880792\,x^2-12.03814373600369\,x+647.7922941196941$$

```
(%i12) at(dR,x=50);
(%o12) -108.9330723824706
```

Den deriverte dR av resultatet R er negativ når x=50.
Derfor lønner det seg ikke å øke produksjonen.

Bedriften vil tilpasse produksjonen slik at overskuddet I(x)-K(x)blir størst mulig.

e) Bruk derivasjon til å finne den produksjonen som gir størst overskudd per dag.
Hvor stort er dette overskuddet?

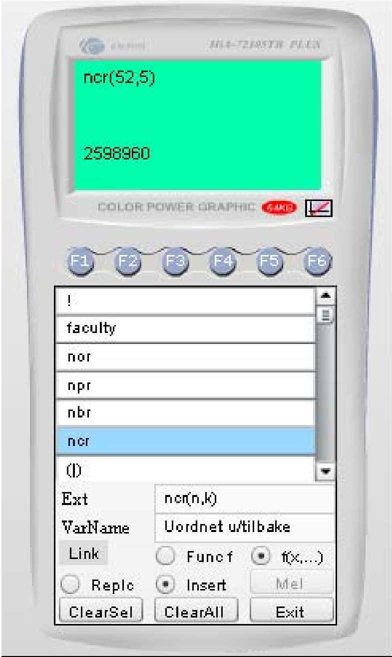
```
(%i13) float(realroots(dR));
(%o13) [x=-238.2899692356587 , x=43.8983362019062]
(%i14) at(R,x=43); at(R,x=44);
(%o14) 12092.14284357671
(%o15) 12099.08884435782
```

44 enheter gir størst overskudd per dag.
Overskuddet er da på kr 12 099

Kapittel 7 Kombinatorikk og sannsynlighet (R1)

Eksamen V08, Del 2, Oppgave 3

En kortstokk består av 52 kort: 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver. Spar og kløver er svarte kort. Hjerter og ruter er røde kort. Fra en kortstokk trekker vi tilfeldig ut 5 kort. I flere kortspill kalles disse 5 kortene en hånd.



med parAbel kalkulator

a) Hvor mange mulige korthender er det?

Trykk på **F3**, merk av for **f(x,…)**, dobbeltklikk **ncr**, erstatt n,k med **52,5** i displayet og les av 2 598 960.

med wxMaxima

Vi definerer følgende hendelser:

A: Korthånden består av 5 spar
B: Korthånden består av 5 svarte korte

b) Bestem P(A) og P(B)

Tast inn det som vises i blått. Les av **P(A) = 0,0495 %** og **P(B) = 2.53 %**

c) Finn P(A|B). Er hendelsene A og B uavhengige?

$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$

Da $P(A \cap B) = P(A)$, får vi:

$P(A \mid B) = P(A)/P(B)$

$P(A \mid B) = 0{,}000495/0{,}0253$

$\mathbf{P(A \mid B) = 1.96\ \%}$

Hvis hendelsene skulle vært uavhengige så skulle $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$P(A \cap B) = 0{,}000495$
$P(A)*P(B) = 0{,}000495*0{,}0253$
$P(A)*P(B) = 0{,}0000125$

Siden
$000495 \neq 0{,}0000125$
Så er
$P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$
og
A og B er ikke uavhengige

```
/*
a) Hvor mange mulige korthender er det?
(%i1) AntallMulige:binomial(52,5);
(%o1) 2598960
/*
Vi definerer følgende hendelser:
   A: Korthånden består av 5 spar.
   B: Korthånden består av 5 svarte kort.

b) Bestem P(A) og P(B).
(%i2) AntallGunstigeA:binomial(13,5);
(%o2) 1287
(%i3) PA:AntallGunstigeA/AntallMulige;
        33
(%o3) -----
      66640
(%i4) float(%);
(%o4) 4.951980792316926 10^-4
(%i5) AntallGunstigeB:binomial(26,5);
(%o5) 65780
(%i6) PB:AntallGunstigeB/AntallMulige;
       253
(%o6) ----
      9996
(%i7) float(%);
(%o7) 0.02531012404962
```

Kapittel 8 Sannsynlighet og statistikk (S2)

Eksempeloppgave REA3028 Matematikk S2, Del 2 Oppgave 4

med wxMaxima

```
Levetiden til en spesiell motor antas
å være normalfordelt med en forventningverdi
på 10 år og et standardavvik på 2år

a1)
Finn sannsynligheten for at motoren
fungerer mindre enn 8 år.

(%i14) load(distrib);
(%o14)
f:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.1

(%i15) p8:float(cdf_normal(8,10,2));
(%o15) 0.15865525393146
```

```
a2)
motoren fungerer mellom 8 og 11 år

(%i16) p11:float(cdf_normal(11,10,2));
(%o16) 0.69146246127401

(%i17) p8til11:p11-p8;
(%o17) 0.53280720734256
```

```
Motorer som blir defekte før garantitiden
går ut, blir erstattet av produsenten.
Firmaet som produserer motorene, ønsker
ikk å erstate mer enn 3% av motorene
b)
Hvor lang garantitid bør de da tilby?

(%i18) quantile_normal(0.03,10,2);
(%o18) 6.238412783697498

Altså 6 år
```

```
I firmaet er de usikre på om forventet levetid
er så lang som 10 år. De registrerer levetiden
i antall år på 10 tilfeldinge valgte motorer:

8.3, 9.2, 7.3, 10.1, 9.5, 8.7, 8.4, 10.0, 9.1, 9.4

De antar forsatt at levetiden til motoren er
normalfordelt med standardavvik på 2 år.

c)
Still opp nullhypotesen H0 og en alternativ
hypotese H1 for denne problemstillingen

H0: Levetiden er 10 år
H1: Levetiden er mindre enn 10 år
```

```
d)
Velg et signifikansnivå på 5% og undersøk
om firmaet må forkaste hypotesen.

(%i1) load (descriptive);
Warning - you are redefining the Maxima function range
(%o1) C:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.17.1/share/contrib/desc

(%i2) load(distrib);
(%o2) C:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.17.1/share/contrib/dist

(%i3) n:10; s:2;
(%o3) 10
(%o4) 2

(%i5) gjn:mean([8.3, 9.2, 7.3, 10.1, 9.5, 8.7, 8.4, 10.0, 9.1, 9.4]);
(%o5) 9.0

(%i6) p:float(cdf_normal(gjn,10,s/sqrt(n)));
(%o6) 0.056923149003329

Sannsynligheten for at levetiden er
mindre enn ti år, er 5.7 %.
Altså forkaster vi ikke H0
når siginfikansnivået er  på 5%.
```

Kapittel 9 Volum av omdreiningslegemer med Maxima (R2)

Oppgave A4.75 side 162 i Sigma R2

a) Tegn grafen til $f(x) = 5e^{-0,2x}\sin x$ *på lommeregneren for* $x \in [0, 2\pi]$

b) Finn volumet av omdreiningslegemet på lommeregneren

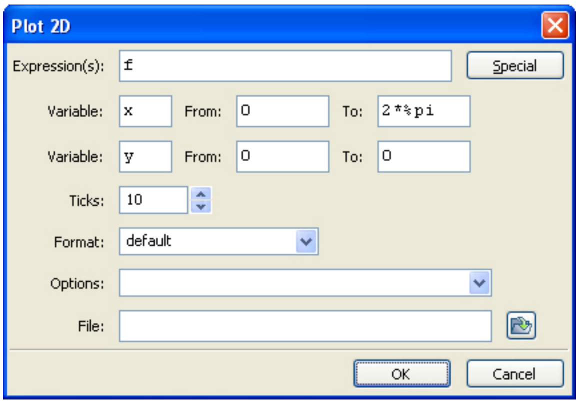
Dersom vi ikke har en lommeregner, kan vi jo prøve oss med wxMaxima:

Først legger vi inn funksjonen: **f:5*%e^(- 0.2*x)*sin(x);** (e skrives %e og π skrives %pi)

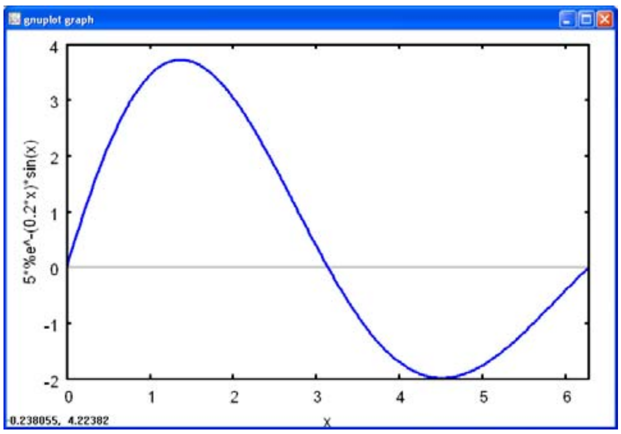
```
(%i1) f:5*%e^(-0.2*x)*sin(x);
(%o1) 5 %e^(-0.2 x) sin(x)

(%i2) plot2d([f], [x,0,2*%pi])$

(%i3) plot3d([x,f*sin(y),f*cos(y)], [x,0,2*%pi], [y,0,2*%pi], [plot_format,openmath])$

(%i4) integrate(%pi*f^2, x, 0, 2*%pi);
`rat' replaced 0.4 by 2/5 = 0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
`rat' replaced -0.4 by -2/5 = -0.4
```

$$(\%o4)\quad 25\,\%pi \left(\frac{125}{104} - \frac{125\,\%e^{-\frac{4\,\%pi}{5}}}{104} \right)$$

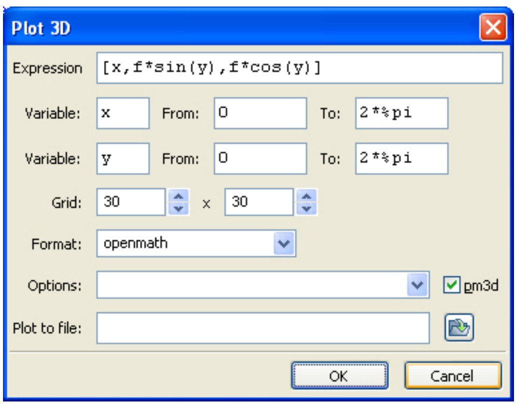
```
(%i5) float(%o4);
(%o5) 86.7522687843951
```



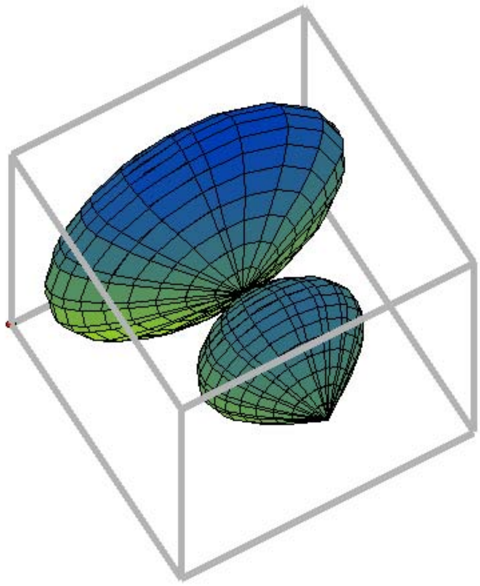
Så klikker vi på **Plot 2D…** og taster inn det som vises i figuren over til høyre. Resultatet vises i figuren til høyre.

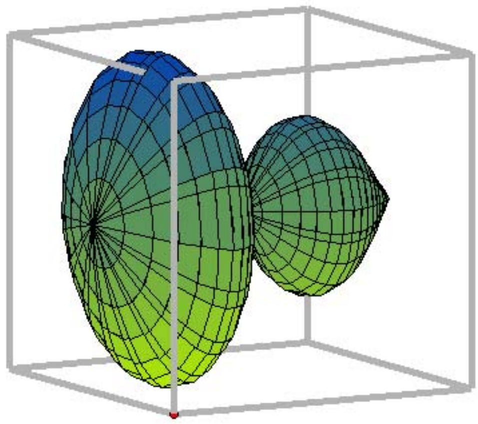


Før vi finner volumet, kan vi ta en titt på omdreiningslegemet ved å klikke på **Plot 3D…** og legge inn følgende informasjon:

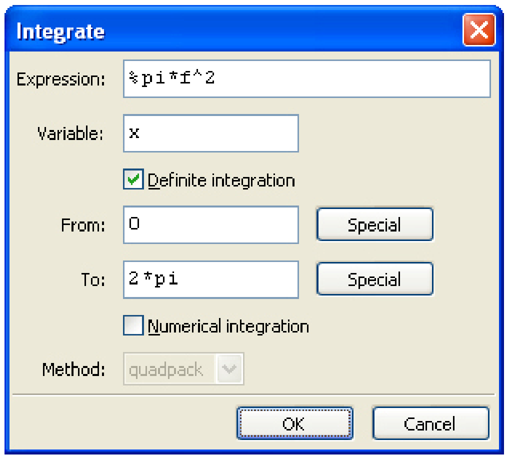


Vi kan se på omdreiningslegemet fra forskjellige synsvinkler ved å klikke å dra i figuren:





Til slutt finner vi volumet ved å velge **Calculus → Integrate** fra menylinja og taste inn informasjonen i figuren til høyre.



For å se svaret som desimaltallet 86,75 skriver vi kommandoen **float(%o4);** hvor %o4 står for output 4.

Kapittel 10 Vektorer og geometri med Maxima (R2)

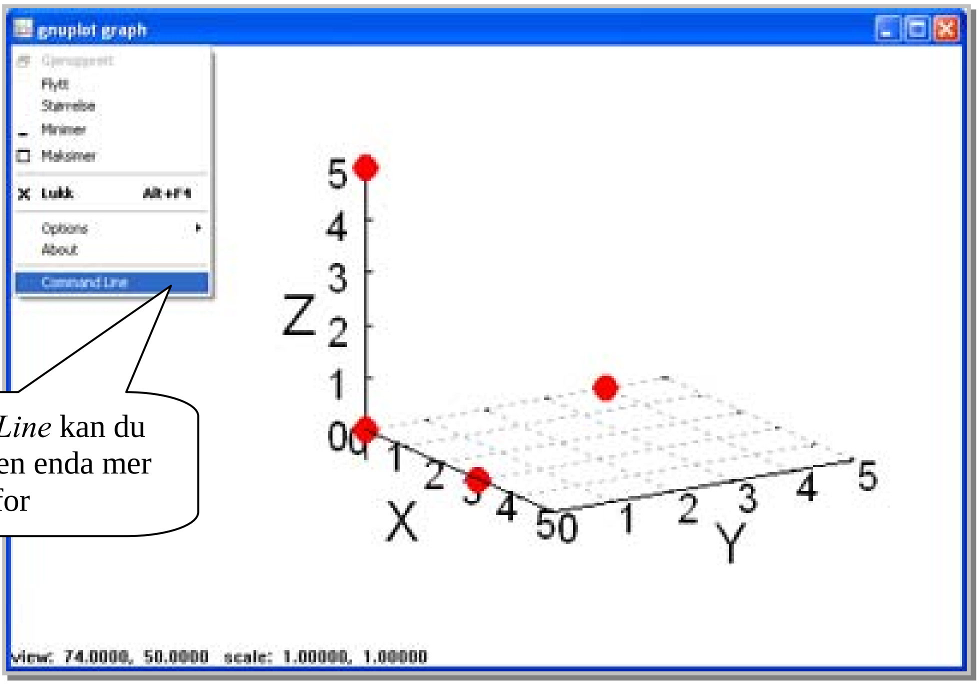
Eksempeloppgave REA3024 Matematikk R2, Del 2 Oppgave 3

I et koordinatsystem har vi punktene O(0,0,0), A(3,0,0), B(0,4,0) og C(0,0,5).

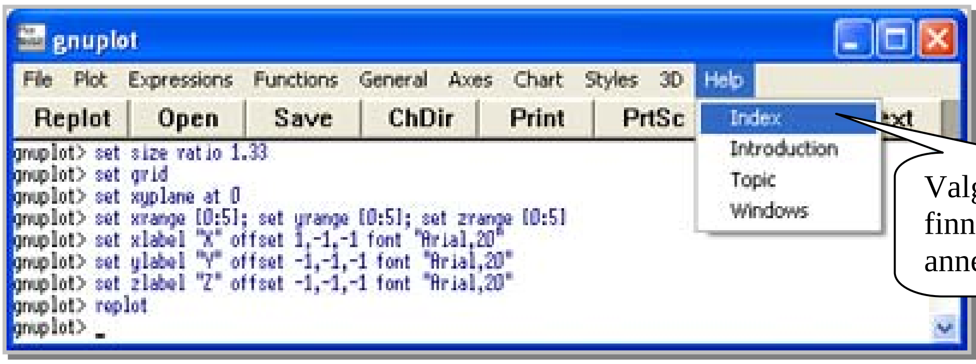
Utskrift fra Maxima:

```
a) Tegn punktene i et kooridnatsystem.
   Finn avstanden fra A til B

(%i1) load(draw);
(%o1) f:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxi

(%i2) draw3d(
        color = red,
        point_type = 7,
        points([[0,0,0],[3,0,0],[0,4,0],[0,0,5]]));
(%o2) [gr3d(points)]
```

Denne kommandoen får fram plot vinduet nedenfor. Flere valg kan du lese om i [manualen]() eller i *Help* (søk på Draw)



Via *Command Line* kan du spesifisere grafen enda mer som vist nedenfor



Valgmulighetene finner du blant annet i Help

```
Definerer vektoren AB og regner ut vektorens lengde
etter formelen L = SQRT(AB.AB)
hvor SQRT er "roten av" og . er "prikk"

(%i3) AB: [0-3,4-0,0-0];
(%o3) [ - 3 , 4 , 0 ]

(%i4) L: sqrt(AB.AB);
(%o4) 5

Svar: Avstanden fra A til B er 5
```

$$L = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

```
b) Finn ABxAC og bruk svaret til å finne
   volumet av tetraederet OABC

   Definerer først vektoren AC og tilordner
   variabelen ABkryssAC resultatet av AC x AB

(%i5) load(vect);
(%o5) f:/Programfiler/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.17.1/sh

(%i6) AC: [0-3,0-0,5-0];
(%o6) [ - 3 , 0 , 5 ]

(%i7) ABkryssAC: express(AB~AC);
(%o7) [ 20 , 15 , 12 ]

Svar: ABxAC er [20,15,12]
```

Kryssproduktet skrives
express(AB~AC)

```
Definerer vektoren AO og regner ut volumet
etter formelen V = 1/6 |(AB x AB) . AO)|

(%i8) AO: [0-3,0-0,0-0];
(%o8) [ - 3 , 0 , 0 ]

(%i9) V: (1/6)*abs(ABkryssAC.AO);
(%o9) 10

Svar: Volumet er 10
```

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AO}\right|$$

En arealsetning oppkalt etter Pytagoras sier at:

$$F^2_{\Delta ABC} = F^2_{\Delta AOC} + F^2_{\Delta BOC} + F^2_{\Delta OAB}$$

Her betyr $F^2_{\Delta ABC}$ arealet av trekanten ABC. Tilsvarende gjelder for leddende på høyre side.

```
c) Regn ut de fire arealene, og kontroller at
   arealsetningen stemmer i dette tilfellet

   Definerer vektorene OA, OB og OC,
   og regner ut arealene i trekantene
   etter formelen A = (1/2)|AB x AC|

   Kvadratet av arealet A blir da
   AA = (1/4)(AB x AC).(AB x AC)
```

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$A^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$$

```
(%i10) OA: [3,0,0]; OB: [0,4,0]; OC: [0,0,5];
(%o10) [3,0,0]
(%o11) [0,4,0]
(%o12) [0,0,5]

(%i13) AAabc: (1/4)*ABkryssAC.ABkryssAC;
```

(%o13) $\frac{769}{4}$

```
(%i14) AAaoc: (1/4)*express(OA~OC).express(OA~OC);
```

(%o14) $\frac{225}{4}$

```
(%i15) AAboc: (1/4)*express(OB~OC).express(OB~OC);
(%o15) 100

(%i16) AAoab: (1/4)*express(OA~OB).express(OA~OB);
(%o16) 36

(%i17) Sum: AAaoc + AAboc + AAoab;
```

(%o17) $\frac{769}{4}$

```
Svar: Vi ser at summen av kvadratet til arealene Aabc,
      Aboc og Aoab er lik kvadratet til arealet Aabc.
```

Planet α går gjennom punktene A, B og C

d) Bestem likningen til planet alfa

Vi finner planlikningen ved å sette skalarproduktet mellom en normalvektor til planet og en vilkårlig vektor i planet til null. ABkryssAC er en normalvektor og vi definerer vektoren AP som går gjennom punktet A

```
(%i18) AP: [x-3,y-0,z-0];
(%o18) [x-3, y, z]

(%i19) ratsimp(ABkryssAC.AP=0);
(%o19) 12 z + 15 y + 20 x - 60 = 0
```

Svar: Planlikningen er 20x + 15y +12z - 60 = 0

e) Et annet plan er gitt ve beta: x + y - z = 5
Finn vinkelen mellom planene alfa og beta

Vinkelen mellom planene er vinkelen mellom normalvektorene,
Nalfa = [20,15,12] og Nbeta = [1,1,-1]
som vi finner med formelen
cos(v) = (Nalfa.Nbeta)/(|Nalfa||Nbeta|)*

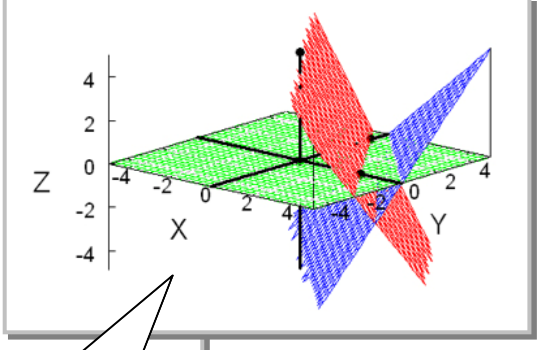
$$\cos\angle(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

```
(%i20) Nalfa: [20,15,12]; Nbeta: [1,1,-1];
(%o20) [20, 15, 12]
(%o21) [1, 1, -1]

(%i22) cos_v:
       (Nalfa.Nbeta)/
       (sqrt(Nalfa.Nalfa)*sqrt(Nbeta.Nbeta));
```

(%o22) $\dfrac{23}{\sqrt{3}\sqrt{769}}$

```
(%i23) v: float(acos(cos_v)*180/%pi);
(%o23) 61.38935218578256
```

Svar: Vinkelen mellom planene er 61,4 grader.



Se Vedlegg 10 for hvordan du kan plotte det røde planet α og det blå planet β.

Vi lar nå punktet C få koordinatene (0,0,t).
Vi antar t ulik 0.

f) forkalr at likningen til planet alfa da
kan skrives på formen alfa: x/3 + y/4 + z/t = 1

Bruker samme framgangsmåte som i oppgave d)

```
(%i25) AC: [0-3,0-0,t-0];
```
(%o25) $[-3, 0, t]$

```
(%i26) ABkryssAC: express(AB~AC);
```
(%o26) $[4t, 3t, 12]$

```
(%i27) ratsimp(ABkryssAC.AP=0);
```
(%o27) $12z+3ty+4tx-12t=0$

som vi dividerer med 12t

```
(%i28) expand((12*z+3*t*y+4*t*x-12*t)/(12*t));
```
(%o28) $\frac{z}{t}+\frac{y}{4}+\frac{x}{3}-1$

Svar: alfa: x/3 + y/4 + z/t = 1

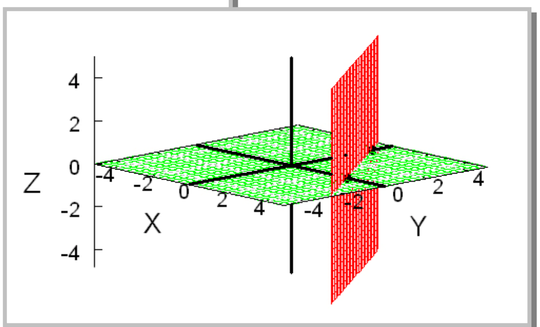
g) Finn likningen for det planet
som alfa næremer seg når t går mot uendellig.
Hva kan du si om dette planet?

```
(%i29) limit(z/t+y/4+x/3-1=0,t,inf);
```

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{t}=1\right)$$

(%o29) $\frac{3y+4x-12}{12}=0$

Ganger med 12 på begge sider og får
Svar: Planlikningen er 4x + 3y - 12 = 0



Svar: Planet står vinkelrett på xy-planet
hvor det går gjennom linja y = 4 - (4/3)x

Vedlegg 1 Enkel GeoGebra for Sinus 1P

8.32 side 239

En linje går gjennom punktene (1,-1) og (3,3)

a) Tegn linja
b) Finn konstantleddet og stigningstallet for linja
c) Finn likningen for linja

- Skriv inn: **(1,-1)** ↵, **(3,3)** ↵ og se at punktene A og B dukker opp
- Velg verktøyet **Linje mellom to punkt** (det tredje verktøyet fra venstre), klikk på **punktet A**, deretter på **punktet B** og **linja a** dukker opp

- Du kan nå lese av konstantleddet **-3** i grafen
- Velg verktøyet **Stigning** som du finner nederst under det sjuende verktøyet fra venstre (Vinkel), klikk på **linja a** og les av **tallet m = 2** (stigning)

- Skriv opp likningen med tallene fra forrige oppgave eller høyre-klikk på **linja a** i algebravinduet, velg **likning y = ax + b** fra menyen og les av: **y = 2x – 3**

8.40 side 243

Når vi bruker drosje, begynner taksameteret på et fast beløp idet turen starter. Dette faste beløpet kaller vi påslaget. Vi setter det her til 40 kr. Under turen blir det med jevne mellomrom automatisk lagt til et beløp på taksameteret, Dette tillegget regner vi om til en kilometerpris. I denne oppgaven setter vi dent til 15 kr.

a) Hva må vi betale for en drosjetur på 12 km
b) Forklar at drosjeutgiftene U i kroner etter x km kan skrives U = 15x + 40
c) Tegn linja i oppgave b når x er mellom 0 og 30
d) Finn av denne linja hva en drosjetur på 20 km koster
e) Hvor langt kan du kjøre drosje for 300 kr

- Skriv inn: **15*12 + 40** ↵ og les av tallet **a = <u>220</u>**

- <u>Drosjeutgifter = kilometerpris * kilometer + påslag</u>

- Skriv inn: **U = Funksjon[15 x + 40, 0, 30]** ↵ og funksjonen U vises
- Klikk i tegnflatene og zoom ut med **musehjulet**
- Juster eventuelt origo og aksene med verktøyknappen **Flytt tegnflaten**

- Skriv inn: **U(20)** ↵ og les av tallet **b = <u>340</u>**

- Skriv inn: **y=300** ↵ og se at det dukker opp en horisontal **linje** kalt **c** i y = 300
- Velg verktøyet **Skjæring mellom to objekt** som du finner under det andre verktøyet fra venstre (Nytt punkt)
- Klikk først på **funksjonen U** og deretter på **linja c** i tegnflaten. **Punktet A** dukker opp og i Algebravinduet til venstre kan du lese av x-verdien til punktet A som er **<u>17,33</u>**

8.50 d side 247

Løs likningene grafisk (og ved regning)

d) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + 3$

- Skriv inn: **3 / 4 x + 1 / 2** ↲ og funksjonen får navnet f(x)
- Skriv inn: **-1/2 x + 3** ↲ og funksjonen får navnet g(x)
- Velg verktøyet **Skjæring mellom to objekt** som du finner under det andre verktøyet fra venstre (Nytt punkt), klikk først på **funksjonen f** og deretter på **funksjonen g** i tegnflaten. **Punktet A** dukker opp og i Algebravinduet til venstre kan du lese av x-verdien til punktet A som er 2

9.35 side 272

Løs denne oppgaven både grafisk og ved hjelp av lommeregneren

a) Tegn grafen til g der $g(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$. *Velg x mellom -3 og 2 når du tegner grafen*
b) Finn nullpunktene til g
c) Finn toppunktet og bunnpunktet ti g

- Skriv inn: **g = Funksjon[-x^3 - 3x^2 + 4, -3, 2]** ↲

- Skriv inn: **nullpunkt[g]** ↲ og les av **(-2,0)** og **(1,0)** i punktene A og B

- Skriv inn: **ekstremalpunkt[g]** og les av bunnpunktet **(-2,0)** og toppunktet **(0,4)** i punktene C og D.

9.62 d side 288

En sommerdag var temperaturen i celsiusgrader mellom kl. 8 og kl. 20 gitt ved $T(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{21}{2}x - 50$ *der x er antallet timer etter midnatt*

a) Tegn grafen til T
b) Finn vekstfarten kl 10 ved hjelp av grafen
c) Finn vekstfarten kl 10 ved hjelp av lommeregneren
d) Finn vekstfarten kl 17 ved hjelp av grafen
e) Finn vekstfarten kl 17 ved hjelp av lommeregneren

- Skriv inn: **T = Funksjon[-3/8x^2 + 21/2x -50, 8, 20]** og zoom inn

- Velg verktøyet **Nytt punkt** (andre fra venstre) og klikk på funksjonen T i tegnflaten.
- Dobbeltklikk på punktet A i algebravinduet og endre x-verdien til 10
- Velg verktøyet **Tangenter** (under det fjerde verktøyet fra venstre), klikk på **punktet A**, deretter **funksjonen T** og les av **3** grader i timen på **linja a** (tangenten) enten ved å se på likningen til tangenten i algebravinduet eller sette inn stigningen til tangenten (se første oppgave 8.32)

- Gjør som ovenfor, men endre x-verdien til 17 i **punkt B**. Les av **-2,25** grader i timen på **linja b** (tangenten)

Vedlegg 2 Feil fasit til 2.26 side 61 i Sigma S1

Fasiten oppgir imidlertid $\frac{14}{15} \approx 0,933$. I GeoGebra bildet nedenfor ser vi at det er punkt F som er utenfor løsningsområdet.

$$X = \frac{2}{15} = 0,13$$

$$Y = \frac{4}{15} = 0,27$$

$$Z = 3 \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{6+8}{15} = \frac{14}{15} \approx 0,93$$

Men dette kan ikke tilfredsstille begrensningen $6x + 3y \leq 1,5$ (linje b) som gir

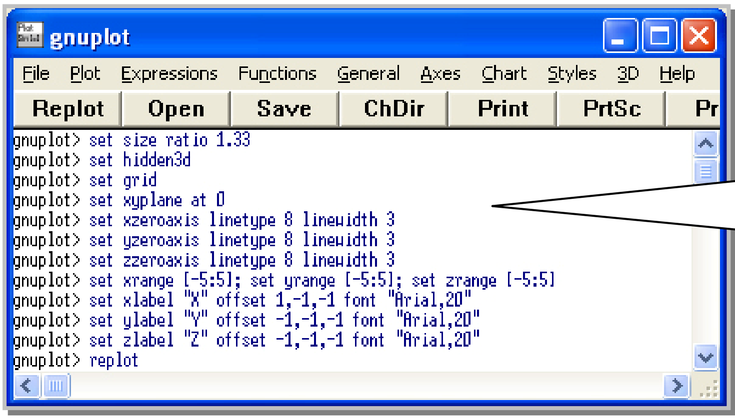
$$6 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{4}{15} = \frac{6 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{15} = \frac{12+12}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1,6$$

Så det riktige svaret må være i punkt D hvor X=0,1   Y= 0,3   Z = 0,9

Punkt C gir for øvrig X=0,15   Y=0,2   Z=0,85

Vedlegg 3 Plott av planene α og β i Kapittel 10

```
(%i24) draw3d(
         color = red,
         explicit(-(20*x+15*y-60)/12,x,-5,5,y,-5,5),
         color = blue,
         explicit(x+y-5,x,-5,5,y,-5,5),
         color = green,
         explicit(0,x,-5,5,y,-5,5),
         color = black,
         point_type = 7,
         points([[0,0,0],[3,0,0],[0,4,0],[0,0,5]])
       );
(%o24) [gr3d(explicit,explicit,explicit,points)]
```



På samme måte som i Maxima kan du benytte mye klipp og lim i gnuplot. Så du trenger ikke huske eller skrive alle kommandoene.